对$A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n+B_n)J_0(\frac{x_n^0}{\rho_0}\rho)=f(\rho)$的右边进行傅里叶-贝塞尔级数展开得到：

$$\begin{cases} A_0=\dfrac{2}{{\rho_0}^2}\displaystyle\int_0^{\rho_0}f(\rho)\rho d\rho \\ A_n+B_n=\dfrac{2}{{\rho_0}^2{J_0}^2(x_n^0)}\displaystyle\int_0^{\rho_0}f(\rho)J_0(\frac{x_n^0}{\rho_0}\rho)\rho d\rho \end{cases}$$

第二式是正常的当$\mu>0$时的傅里叶-贝塞尔级数展开，第一式是什么？
回答：是当$\mu=0$时的傅里叶-贝塞尔级数展开，下面解释这样做的合理性。
当$\mu=0$时，0 阶贝塞尔函数的模方为：

$$(\mathrm{N}_n^0)^2=\int_0^{\rho_0}{J_0}^2(0)\rho d\rho=\frac{1}{2}\rho_0^2$$

于是积分号前的系数为$\frac{1}{(\mathrm{N}_n^0)^2}=\frac{2}{{\rho_0}^2}$

下面要证明$\mu=0$时的傅里叶-贝塞尔级数展开的基（即常数 1）与$\mu>0$时的傅里叶-贝塞尔级数展开带权重ρ正交：

$$\int_0^{\rho_0}1\times J_0\left(\frac{x_n^0}{\rho_0}\rho\right)\rho d\rho=\left(\frac{\rho_0}{x_n^0}\right)^2\int_0^{x_n^0}J_0(x)xdx=\left(\frac{\rho_0}{x_n^0}\right)^2J_1(x_n^0)$$

因为第二类齐次边界条件要求：

$${J_0}'(x_n^0)=-J_1(x_n^0)=0$$

所以$\int_0^{\rho_0}1\times J_0\left(\frac{x_n^0}{\rho_0}\rho\right)\rho d\rho=0$，至此正交性得证，因此 1 也是该展开的一个正交基。

题目半径为ρ_0而高为L的圆柱体，下底温度分布为$u_0\rho^2$，上底温度保持为u_1，侧面绝热，求柱体内的稳恒温度分布。

解为：

$$\mathrm{u}=\frac{1}{2}u_0\rho^2+\frac{u_1-\frac{1}{2}u_0\rho^2}{L}z+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4u_0\rho_0^2}{(x_n^1)^2J_0(x_n^1)\left(1-e^{\frac{2x_n^1L}{\rho_0}}\right)}e^{\frac{x_n^1z}{\rho_0}}+\frac{4u_0\rho_0^2}{(x_n^1)^2J_0(x_n^1)\left(1-e^{\frac{-2x_n^1L}{\rho_0}}\right)}e^{\frac{-x_n^1z}{\rho_0}}\right)J_0\left(\frac{x_n^1}{\rho_0}\rho\right)$$