满足加减乘除不变的有限变换σ作用在不含 0 根的一元 n 次有理数系数方程的根上，一定得到该方程的一个根①，且所有满足该条件的对该方程根的变换σ均为一一映射②，并构成一个置换群③。

证明：

①

由$\sigma(a \pm b) = \sigma(a) \pm \sigma(b)$，$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$，$\sigma(c) = d$(c、d 均为有限值)

取$a = b = 0$ 得 $\sigma(0) = 0; a = 1$ 得 $\sigma(1) = 1,$ 进而 $\sigma\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$(p、q 为整数),

即 σ 保持有理数不变

设方程表达式为：$f(\alpha_m) = \sum_{i=0}^{n} a_i(\alpha_m)^i = 0$，式中$\alpha_m$为方程的根

那么$\sigma\big(f(\alpha_m)\big) = \sum_{i=0}^{n} a_i(\sigma(\alpha_m))^i = 0$

于是$\sigma(\alpha_m)$也是方程的根

②

假设存在一个变换对方程的根非一一映射，设$\begin{cases}\sigma(\alpha_i) = \alpha_m \\ \sigma(\alpha_j) = \alpha_m\end{cases}, \alpha_i \neq \alpha_j$则$\sigma(\alpha_i - \alpha_j) = 0$

$$\alpha_m = \sigma(\alpha_i) = \sigma\left(\frac{(\alpha_i - \alpha_j)\alpha_i}{(\alpha_i - \alpha_j)}\right) = \sigma(\alpha_i - \alpha_j)\sigma\left(\frac{\alpha_i}{(\alpha_i - \alpha_j)}\right) = 0$$

这与方程不含 0 根矛盾，于是所有满足该条件的对该方程根的变换σ均为一一映射

③

1） 一个把集合元素映射到本集合元素的一一映射一定对应一个置换操作：

设有集合$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_i)$，任取其中一个元素做映射$\sigma(\alpha_1) = \alpha_m$

若$\alpha_m = \alpha_1$，则对其余元素重复以上操作；

若$\alpha_m \neq \alpha_1$，则对α_m继续做映射，且该映射一定不能映射到α_m（否则不是一一映射），设映射到α_n，则对α_n继续做映射⋯若其中某次映射到α_1，则对其余元素重复任取元素做映射的操作，直到所有元素均做完一次映射。

将以上每次操作记为将操作前的元素换为操作后的元素，就得到一个 i 个元素的置换操作

2）对方程根的所有变换σ的集合满足封闭性：

设两个任意变换作用结果为$\sigma_2\big(\sigma_1(\alpha_i)\big) = \alpha_j$

显然$\sigma_3(\alpha_i) = \sigma_2\sigma_1(\alpha_i) = \alpha_j$也在对方程根的变换σ的集合中。

于是σ变换对应一个置换操作，所有对方程根的变换σ组成的集合对应一个置换群。